

Geometria 3: 01 luglio 2019.

Esercizio 1. Si consideri la curva regolare $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$$

- (1) Determinare il triedro fondamentale per γ in ogni suo punto. **(3 pt.)**
- (2) Dimostrare che la curva è biregolare e dire se giace su un piano. **(3 pt.)**

Esercizio 2. Sia C la curva di \mathbb{R}^3 avente parametrizzazione

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{t}, \frac{1}{t}, t \right) \quad \forall t > 0$$

e si consideri la superficie di rivoluzione S ottenuta ruotando C attorno all'asse z .

- (1) Fornire una parametrizzazione per S , prendendo il parametro di rotazione nell'intervallo $[0, 2\pi)$. **SUGGERIMENTO: PER OGNI $t > 0$, TROVARE CENTRO E RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA STACCATA DAL PIANO $z = t$. (2 pt.)**
- (2) Verificare che $S = f^{-1}(0) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, dove $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è definita come segue:

$$f(x, y, z) = z^2(x^2 + y^2) - 1 - z^3$$

e dedurre che S si tratta di una superficie regolare. **(2 pt.)**

- (3) Usando la parametrizzazione fornita al primo punto, determinare i coefficienti metrici di S , scrivere la matrice di rappresentazione del differenziale della mappa di Gauss e stabilire la natura dei punti di S . **(2 pt.)**

Esercizio 3. (1) Determinare la trasformazione lineare fratta T che manda i in $\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$, 0 in $\frac{1}{2}$ e 2 in ∞ . **(2 pt.);**

(2) Trovare i punti fissi di T . **(2 pt.);**

(3) Determinare l'immagine di $A := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ tramite T . **(2 pt.).**

Esercizio 4. Calcolare il valore dei seguenti integrali:

(1) $\oint_{\gamma(1;1)} \frac{i \cos(3z)}{(z-1)^5} dz$ **(1 pt.);**

(2) $\oint_{\gamma(1; \frac{1}{5})} -4z^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz$ **(1 pt.);**

(3) $\oint_{\gamma(1; \frac{3}{2})} \frac{2z^2}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{3}{2}i)} dz$ **(1 pt.).**

Trovare inoltre la serie di Laurent centrata in $z = -2i$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z+2i} - \frac{2}{z-6i} \quad \text{(1pt.);}$$

Calcolare il residuo della funzione $\frac{1}{\sin(z)}$ nel punto $z = 0$. Che tipo di singolarità risulta essere il punto $z = 0$? **(1 pt.)**;

Determinare infine i poli e gli zeri in \mathbb{C} (con rispettive molteplicità) della funzione:

$$f(z) := \frac{(z^2 - 1)(2z^2 - (1 + 6i)z + 3i)^3}{(z - 2)(2z - 1)\sin^2(\pi z)} \quad \text{(1pt.)};$$

Esercizio 5. Provare le seguenti affermazioni:

(1) Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione intera tale che $f(z) = f(z + i) = f(z + 1)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Provare che f è costante. **(3 pt.)**;

(2) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un sottoinsieme connesso tale che esista una collezione $\{S_\alpha\}$ di superfici con

$S = \bigcup_{\alpha} S_\alpha$ e tale che ogni S_α sia aperta in S . Provare che S è una superficie. **(3 pt.)**